I. etap Olimpiady Informatycznej 2000/2001: Opracowanie zadania „Gra w zielone“*

Marcin Jurdziński

Czerwiec 2001

1 Treść zadania „Gra w zielone“

Gra w zielone jest grą dla dwóch graczy—nazwijmy ich Ania i Bolek—polegającą na przesuwania pionka po planszy.

Część pól planszy jest pokolorowana na zielono, a pozostałe są białe. Wszystkie pola są ponumerowane liczbami naturalnymi z zakresu $1 \ldots (a + b)$, pola o numerach z zakresu $1 \ldots a$ należą do Ani, natomiast pola o numerach $(a + 1) \ldots (a + b)$ należą do Bolka.

Dla każdego pola dany jest zbiór *następników*, zawierający te pola planszy, do których można z niego przejść w jednym ruchu. Zbiory te zostały tak dobrane, że z pola należącego do Ani można przejść w jednym ruchu tylko na pole należące do Bolka i odwrotnie.

Na początku gry ustawiamy pionek na dowolnym polu, a następnie gracze na przemian przestawiają pionek ze swojego pola na dowolny następnik tego pola—należący do przeciwnika. Grę rozpoczyna właściciel pola, z którego zaczynamy rozgrywkę. Zakładamy, że wszystkie pola mają niepuste zbiory następników, a więc zawsze można wykonać ruch. Gra kończy się w momencie, gdy pionek stanie po raz drugi na tym samym polu. Jeśli w sekwencji ruchów, od pierwszego do powtórnego zajęcia tego pola, pionek stanął przynajmniej raz na polu zielonym, to wygrywa Ania, w przeciwnym przypadku wygrywa Bolek.

Powiemy, że Ania ma *strategię wygrywającą dla danego pola początkowego*, jeśli istnieje metoda gwarantująca jej wygraną w rozgrywce zaczynającej się od tego pola, niezależnie od tego, jakie ruchy będzie wykonywał Bolek.

1.1 Zadanie

Napisz program, który:

- wczyta z pliku tekstowego `gra.in` opis planszy do gry w zielone,
- znajdzie zbiór pól planszy, dla których Ania ma strategię wygrywającą,
- zapisze wynik w pliku tekstowym `gra.out`.

*To opracowanie znajdzie się w sprawozdaniu z VIII Olimpiady Informatycznej, które wraz ze sprawozdaniami z poprzednich edycji Olimpiady jest dostępne pod adresem: `http://www.mimuw.edu.pl/OI/blue/`

1.2 Wejście

W pierwszym wierszu pliku tekstowego `gra.in` zapisane są dwie nieujemne liczby całkowite a, b oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające odpowiednio: liczbę pól należących do Ani i liczbę pól należących do Bolka. Liczby a, b spełniają warunek: $1 \le a + b \le 3\,000$. W kolejnych a+b wierszach opisano pola planszy—najpierw pola należące do Ani, a następnie pola należące do Bolka. Wiersz o numerze $i + 1$, dla $1 \le i \le a + b$, zawiera na początku liczby całkowite z, k oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające odpowiednio kolor pola o numerze i (0 oznacza kolor biały, 1—kolor zielony), oraz liczbę następników tego pola. Następnie w tym wierszu zapisane jest k liczb całkowitych ($1 \le k < a + b$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami, będącymi numerami następników danego pola. Liczba pól zielonych na planszy nie przekracza 100. Suma liczb następników wszystkich pól na planszy nie przekracza 30 000.

1.3 Wyjście

Pierwszy wiersz pliku tekstowego `gra.out` powinien zawierać dokładnie jedną liczbę całkowitą p, oznaczającą liczbę pól, na których Ania ma strategię wygrywającą. Następne p wierszy powinno zawierać numery tych pól zapisane w kolejności rosnącej—każda liczba powinna zostać zapisana w osobnym wierszu.

1.4 Przykład

Dla pliku wejściowego `gra.in`:

```
5 3
0 2 6 7
0 3 6 7 8
0 1 8
1 1 7
1 1 8
1 2 1 2
0 2 1 2
0 2 3 4
```

poprawną odpowiedzią jest plik wyjściowy `gra.out`:

```
5
1
2
4
6
7
```

2 Rozwiązanie

Ścisłe sformułowanie faktu, że Ania ma strategię wygrywającą w grze w zielone z danego pola początkowego nie jest banalne i jest zaledwie naszkicowane w treści zadania. Jego sprecyzowanie oraz algorytmiczną charakteryzację należy zatem do pewnego stopnia traktować jako część zadania postawionego przed uczestnikami olimpiady.

Przez P będziemy oznaczać zbiór wszystkich pól na planszy gry, a przez Z zbiór wszystkich zielonych pól.

Aby ułatwić opis strategii wygrywających w grze w zielone oraz ich poszukiwanie, wygodnie jest rozważyć następującą uproszczoną wersję gry. Niech $X \subseteq Z$ będzie pewnym zbiorem zielonych pól na planszy. *Uproszczona gra w zielone* toczy się w podobny sposób do zwyczajnej gry w zielone. Różnica polega na tym, że w uproszczonej grze w zielone rozgrywka może się zakończyć wcześniej: gry pionek odwiedzi zielone pole ze zbioru X po raz pierwszy rozgrywka zostaje przerwana i Ania zwycięża.

Przez $Wymu\acute{s}(X)$ oznaczamy zbiór pól z których Ania ma strategię wygrywającą w uproszczonej grze w zielone. Zauważ, że $Wymu\acute{s}(X)$ jest zbiorem pól z których Ania może wymusić przesunięcie pionka na pewne zielone pole ze zbioru X w taki sposób, że pionek nie staje na żadnym polu dwa razy.

W poniższym fakcie wykazujemy, że rozwiązanie uproszczonej gry w zielone dla $X = Z$,—tj. obliczenie zbioru $Wymu\acute{s}(Z)$—jest pomocne w ustaleniu pewnego zbioru pól z ktorych Bolek ma strategię wygrywającą w normalnej grze w zielone.

Fakt 2.1 (Strategia wygrywająca dla Bolka) *Bolek ma strategię wygrywającą z każdego pola które nie jest w zbiorze $Wymu\acute{s}(Z)$.*

Dowód. Fakt, że pole p nie należy do zbioru $Wymu\acute{s}(Z)$ oznacza, że w uproszczonej grze w zielone rozpoczynającej się w polu p Bolek potrafi zapobiec dojściu do jakiegokolwiek zielonego pola. Cała rozgrywka toczy się więc i kończy w białej części planszy: to gwarantuje zwycięstwo Bolka w zwyczajnej grze w zielone z pola p. □

Przykład 2.2 *W tym i w poniższych przykładach ilustrujemy pojęcia i fakty opisane w tym opracowaniu na przykładzie gry w zielone z treści zadania.*

Zauważ, że $Z = \{4, 5, 6\}$, oraz $Wymu\acute{s}(Z) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$. W polach spoza zbioru $Wymu\acute{s}(Z)$, tj. w polach ze zbioru $\{3, 8\}$, Bolek ma strategię wygrywającą polegającą na wybraniu pola 3 jako następnika w polu 8.

Następnie spróbujemy ustalić jakie warunki gwarantują, że strategia wygrywająca dla Ani w uproszczonej grze w zielone daje Ani zwycięstwo także w normalnej grze w zielone. W tym celu przydatne okazuje się pojęcie pułapki dla Bolka.

Definicja 2.3 (Pułapka dla Bolka) *Powiemy, że zbiór pól $Wymu\acute{s}(X)$ jest* pułapką *dla Bolka jeśli dla każdego pola p ze zbioru X mamy:*

1. *pole p należy do Ani i* istnieje *następnik pola p znajdujący się w zbiorze $Wymu\acute{s}(X)$; lub*
2. *pole p należy do Bolka i* każdy *następnik pola p znajduje się w zbiorze $Wymu\acute{s}(X)$.*

Przykład 2.4 *Niech $X = \{4, 6\}$. Zbiór $Wymu\acute{s}(X) = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ jest pułapką dla Bolka, ponieważ:*

- *istnieje następnik pola 4 (tj. pole 7) w zbiorze Wymuś(X), oraz*
- *każdy następnik pola 6 (tj. zarówno pole 1 jak i pole 2) należy do zbioru Wymuś(X).*

Fakt 2.5 (Strategia wygrywająca dla Ani) *Jeśli zbiór Wymuś(X) jest pułapką dla Bolka to Ania ma strategię wygrywającą z każdego pola w zbiorze Wymuś(X).*

Dowód. Rozważmy następującą strategię dla Ani:

- w każdym białym polu Ani ze zbioru *Wymuś*(X) Ania gra zgodnie z jej strategią wygrywającą w uproszczonej grze w zielone;
- w każdym zielonym polu Ani ze zbioru *Wymuś*(X), tj. w każdym polu Ani ze zbioru X, Ania wybiera następnika który należy do zbioru *Wymuś*(X): taki następnik istnieje bo zbiór *Wymuś*(X) jest pułapką dla Bolka.

Zauważ, że w każdej rozgrywce zgodnej z tą strategią pionek nigdy nie opuszcza zbioru *Wymuś*(X). Co więcej, żaden cykl (tj. fragment rozgrywki rozpoczynający sie i kończący w tym samym polu) w takiej rozgrywce nie składa się tylko z białych pól ponieważ strategia Ani na białych polach jest wygrywająca w uproszczonej grze w zielone. Dlatego każda rozgrywka zgodna z powyższą strategią jest wygrywająca dla Ani w zwyczajnej grze w zielone. □

Pozostaje nam do rozwiązania sytuacja w której zbiór *Wymuś*(Z) nie jest pułapką dla Bolka. Niech $Z_1 \subseteq Z$ będzie zbiorem zielonych pól które spełniają warunki 1. lub 2. definicji pułapki dla Bolka, dla $X = Z$.

Zauważ, że w zielonych polach nie należących do zbioru Z_1 Bolek ma następującą strategię wygrywającą: najpierw przesuń pionek w jednym kroku do pola nie należącego do zbioru *Wymuś*(Z), a następnie użyj strategii wygrywającej zagwarantowanej przez Fakt 2.1. Możemy zatem odrzucić zielone pola spoza zbioru Z_1 jako „bezużyteczne“ dla Ani.

Aby ponowić próbę użycia Faktu 2.5 do wyznaczenia strategii wygrywającej dla Ani, rozważmy zbiór *Wymuś*(Z_1). Jeśli ten zbiór jest pułapką dla Bolka to rozwiązanie gry w zielone jest gotowe (można wykazać—patrz dowód ogolniejszego Faktu 2.7 poniżej—, że także we wszystkich białych polach spoza zbioru *Wymuś*(Z_1) Bolek ma strategię wygrywającą.) W przeciwnym wypadku należy ponownie odrzucić zielone pola które okazały się bezużyteczne dla Ani, itd.

Powyższe rozumowanie motywuje następującą metodę obliczania kolejnych, coraz mniejszych, zbiorów zielonych pól które kandydują do roli pól dających Ani strategię wygrywającą poprzez Fakt 2.5.

procedure *NajwiększaPułapkaDlaBolka*
begin
    $Z_0 := Z$
    $i := 0$
    while *Wymuś*(Z_i) nie jest pułapką dla Bolka **do**
    begin
        Z_{i+1} := zbiór pól z Z_i spełniających warunki 1. lub 2. Definicji 2.3
        $i := i + 1$

9: **end**
10: **end**

Przykład 2.6 *Z Przykładu 2.2 mamy* $Z_0 = Z = \{4, 5, 6\}$*, oraz* $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_0) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$*. Zauważ, że* Z_0 *nie jest pułapką dla Bolka bo pole 5 należy do Ani ale jedyny następnik pola 5, tj. pole 8,* nie należy *do zbioru* $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_0)$*. Pole 5 jest jedynym polem z* Z_0 *nie spełniającym warunków 1. lub 2. Definicji 2.3, więc* $Z_1 = \{4, 6\}$*. Z Przykładu 2.4 wiemy, że zbiór* $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_1)$ *jest pułapką dla Bolka.*

Zauważ, że jeśli warunek kontynuacji wykonywania pętli 5:–9: jest spełniony to istnieje przynajmniej jedno zielone pole w zbiorze Z_i *nie* spełniające warunków 1. lub 2. Definicji 2.3. Dlatego ciąg zbiorów Z_i jest malejący, więc liczba iteracji pętli 5:–9: jest $O(k)$.

Niech ℓ będzie najmniejszą liczbą dla której zbiór $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_\ell)$ jest pułapką dla Bolka. Oczywiście Ania ma strategię wygrywającą ze zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_\ell)$: wynika to z Faktu 2.5. Aby wykazać, że $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_\ell)$ to zbiór *wszystkich* pól z których Ania ma strategię wygrywającą wystarczy udowodnić, że z każdego pola spoza zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_\ell)$, Bolek ma strategię wygrywającą.

Fakt 2.7 (Strategia wygrywająca dla Bolka: ogólny przypadek)
Dla każdego $i \leq \ell$*, Bolek ma strategię wygrywającą z każdego pola spoza zbioru* $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i)$*.*

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję ze względu na i. Zauważ, że dla $i = 0$ teza wynika wprost z Faktu 2.1.

Załóżmy, że dla pewnego $i < \ell$, Bolek ma strategię wygrywającą z każdego pola spoza zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i)$. Wykażemy, że wtedy Bolek ma także strategię wygrywającą z każdego pola spoza zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_{i+1})$.

Wystarczy udowodnić, że Bolek ma strategie wygrywającą z każdego pola ze zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i) \setminus \mathit{Wymu\acute{s}}(Z_{i+1})$: dla pól nie należących do zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i)$ teza wynika z hipotezy indukcyjnej.

Rozważmy dwa rodzaje pól ze zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i) \setminus \mathit{Wymu\acute{s}}(Z_{i+1})$:

1. Jeśli pole jest zielone to nie spełnia warunków 1. lub 2. Definicji 2.3, więc Bolek może z tego pola w jednym kroku wymusić przesunięcie pionka poza zbiór $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i)$, skąd ma strategię wygrywającą z hipotezy indukcyjnej.

2. Jeśli pole jest białe to Bolek korzysta ze strategii w uproszczonej grze w zielone, która zapobiega dojściu pionka do zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_{i+1})$. Jeśli w wyniku rozgrywki pionek stanie na jednym z zielonych pól w zbiorze $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i) \setminus \mathit{Wymu\acute{s}}(Z_{i+1})$ wtedy Bolek postępuje jak w przypadku 1. i wygrywa. W przeciwnym razie rozgrywka toczy sie i kończy w białej części zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(Z_i) \setminus \mathit{Wymu\acute{s}}(Z_{i+1})$, więc jest wygrywająca dla Bolka. □

Aby precyzyjnie oszacować koszt czasowy działania algorytmu *Największa-PułapkaDlaBolka* musimy ustalić jaki jest koszt rozwiązywania uproszczonej gry w zielone, tj. obliczania zbioru $\mathit{Wymu\acute{s}}(X)$. Powiemy, że warunek *AniaWymusza*(T, p) zachodzi dla pewnego zbioru pól T, oraz pola p, jeśli mamy:

- pole p należy do Ani i *istnieje* następnik pola p należący do zbioru T, lub

- pole p należy do Bolka i *każdy* następnik pola p należy do zbioru T.

Ćwiczenie 2.8 (Poprawność algorytmu *ObliczZbiórWymuś*)
Wykaż, że poniższa procedura ObliczWymuś(X) *wyznacza poprawnie zbiór pól z których Ania ma strategię wygrywającą w uproszczonej grze w zielone, tj. zbiór Wymuś*(X).

```
procedure  ObliczWymuś(X)
begin
    W := X
    while istnieje pole p ∉ W takie, że AniaWymusza(W, p) do
        dodaj pole p do zbioru W
    return(W)
end
```

Procedurę *ObliczWymuś* można zaimplementować tak aby działała w czasie $O(m)$, gdzie m jest sumą liczb następników dla wszystkich pól. Przykładowa implementacja znajduje się na załączonej dyskietce.

Powyższą algorytmiczną analizę struktury strategii wygrywających dla Ani i Bolka w grze w zielone można podsumować w następujący sposób.

Twierdzenie 2.9 (Poprawność algorytmu *NajwiększaPułapkaDlaBolka*)
Niech ℓ będzie najmniejszą liczbą dla której w procedurze NajwiększaPułapkaDlaBolka zbiór Wymuś(Z_ℓ) jest pułapką dla Bolka. Wtedy Ania ma strategię wygrywającą z pól ze zbioru Wymuś(Z_ℓ), a Bolek ma strategię wygrywającą ze wszystkich pozostałych pól. Algorytm można zaimplementować tak by działał w czasie $O(k \cdot m)$, gdzie k jest liczbą zielonych pól, a m jest sumą liczb następników dla wszystkich pól.

3 Inne rozwiązania

W tym podrozdziale omówimy alternatywny warunek wystarczający i konieczny dla istnienia strategii wygrywających dla Bolka lub Ani w grze w zielone. Interesującą cechą tego warunku jest jego lokalność: jeśli każde pole jest w odpowiedniej, dość łatwej do sprawdzenia, relacji ze zbiorem jego następników to mamy gwarancję, że istnieje „globalna“ strategia wygrywająca dla odpowiedniego gracza.

Definicja 3.1 (Dobre etykietowanie dla Bolka)
Rozważmy funkcję $\beta : P \to \{0, 1, 2, \ldots, k, \infty\}$: z każdym polem $p \in P$, związana jest etykieta $\beta(p)$, która jest liczbą naturalną nie większą niż k, lub symbolem ∞. Przyjmujemy tu umowę, że symbol ∞ jest większy niż każda liczba naturalna, czyli $i < \infty$, dla każdej liczby naturalnej i. Powiemy, że etykietowanie β jest dobre dla Bolka w polu p *jeśli $\beta(p) = \infty$ lub spełnione są następujące warunki:*

- *jeśli pole p należy do Ani to dla* każdego *następnika r pola p zachodzi warunek PostępBolka$(\beta; p, r)$;*

- *jeśli pole p należy do Bolka to* istnieje *następnik r pola p taki, że zachodzi warunek PostępBolka$(\beta; p, r)$;*

gdzie warunek PostępBolka$(\beta; p, r)$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy gdy:

1. $\beta(p) > \beta(r)$ *jeśli pole* p *jest zielone, oraz*

2. $\beta(p) \geq \beta(r)$ *jeśli pole* p *jest białe.*

Mówimy, że etykietowanie β *jest* dobre *dla Bolka jeśli* β *jest dobre dla Bolka we wszystkich polach planszy.*

Przykład 3.2 *Zauważ, że zbiór* P *pól gry w zielone z treści zadania jest równy* $P = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$*. Niech etykietowanie* $\beta : P \to \{0, 1, 2, 3, \infty\}$ *będzie zdefiniowane przez następującą tabelę.*

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta(p)$	∞	∞	1	∞	3	∞	∞	1

Etykietowanie β *jest dobre dla Bolka ponieważ:*

- *pole 3 należy do Ani, pole 8 jest jedynym następnikiem pola 3, oraz zachodzi PostępBolka*$(\beta; 3, 8)$*, tj.* $\beta(3) \geq \beta(8)$*; zauważ, że wystarczy tu nieostra nierówność bo pole 3 jest białe;*

- *pole 5 należy do Ani, pole 8 jest jedynym następnikiem pola 5, oraz zachodzi PostępBolka*$(\beta; 5, 8)$*, tj.* $\beta(5) > \beta(8)$*; zauważ, że wymagana tu jest ostra nierówność bo pole 5 jest zielone;*

- *pole 8 należy do Bolka i dla pola 3, które jest następnikiem pola 5, zachodzi PostępBolka*$(\beta; 8, 3)$*, tj.* $\beta(8) \geq \beta(3)$*.*

Za tą—na pierwszy rzut oka—zawiłą definicją kryje się następująca prosta intuicja. O etykiecie $\beta(p)$ pola p—o ile ta etykieta jest liczbą naturalną a nie symbolem ∞—można myśleć jako o górnym ograniczeniu na liczbę zielonych pól które Bolek może być zmuszony przez Anię odwiedzić w rozgrywce jeśli Bolek wybiera zawsze następnika o jak najmniejszej etykiecie. Wykażemy, że wybieranie następnika o najmniejszej etykiecie gwarantuje Bolkowi zwycięstwo w grze w zielone jeśli etykietowanie jest dobre dla Bolka.

Fakt 3.3 (Strategia wygrywająca dla Bolka) *Jeśli etykietowanie* $\beta : P \to \{0, 1, 2, \ldots, k, \infty\}$ *jest dobre dla Bolka to Bolek ma strategię wygrywającą z każdego pola* p *takiego, że* $\beta(v) \neq \infty$*.*

Dowód. Wykażemy, że następująca strategia jest wygrywająca dla Bolka: w każdym polu p należącym dla Bolka, Bolek wybiera następnika r pola p o jak najmniejszej etykiecie $\beta(r)$. Zauważmy, że z definicji dobrego etykietowania dla Bolka wynika, że wtedy dla każdej rozgrywki $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_i$ mamy

$$\beta(p_1) \geq \beta(p_2) \geq \beta(p_3) \geq \cdots \geq \beta(p_i).$$

Niech $p_j = p_i$ dla pewnego $j < i$, tj. $p_j = p_i$ to pierwsze pole na którym pionek stanął dwa razy. Z powyższego warunku wynika, że $\beta(p_j) \geq \beta(p_{j+1}) \geq \beta(p_{j+2}) \geq \cdots \geq \beta(p_i) = \beta(p_j)$, więc musi być $\beta(p_j) = \beta(p_{j+1}) = \beta(p_{j+2}) = \cdots = \beta(p_i)$. Z definicji dobrego etykietowania dla Bolka—a dokładniej z punktu 1. definicji warunku *PostępBolka*(β, p, r)—wynika, że pola $p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, \ldots, p_i$ są białe. Inaczej mówiąc, żadne pole odwiedzone pomiędzy pierwszą i drugą wizytą w polu $p_j = p_i$ nie jest zielone, czyli rozgrywka jest wygrywająca dla Bolka. □

Powyższy fakt oznacza, że istnienie dobrego etykietowania β dla Bolka, dla którego zachodzi $\beta(p) \neq \infty$, jest warunkiem wystarczającym dla istnienia strategii wygrywającej dla Bolka z pola p. Poniżej naszkicujemy dowód faktu, że jest to również warunek konieczny, oraz przedstawimy wydajny sposób znajdowania dobrych etykietowań. Rozważmy następującą procedurę poszukiwania dobrego etykietowania dla Bolka:

```
procedure  PodnośEtykietowanie
begin
    dla każdego pola p do β(p) := 0
    while β nie jest dobre dla Bolka do
    begin
        wybierz pole p w którym β nie jest dobre dla Bolka
        β(p) := Popraw(β, p)
    end
end
```

gdzie $\mathit{Popraw}(\beta, p)$ to najmniejsza etykieta nie mniejsza niż $\beta(p)$, która przypisana polu p gwarantuje, że etykietowanie β staje się dobre w polu p. Wartość $\mathit{Popraw}(\beta, p)$ można obliczyć na przykład tak:

$$\mathit{Popraw}(\beta, p) = \begin{cases} \beta(p) & \text{jeśli } \beta \text{ jest dobre dla Bolka w polu } p, \\ \mathit{MaxMin}(\beta, p) & \text{jeśli } p \text{ jest białe,} \\ \infty & \text{jeśli } p \text{ jest zielone i } \mathit{MaxMin}(\beta, p) \geq k, \\ 1 + \mathit{MaxMin}(\beta, p) & \text{jeśli } p \text{ jest zielone i } \mathit{MaxMin}(\beta, p) < k; \end{cases}$$

gdzie $\mathit{MaxMin}(\beta, p)$ jest zdefiniowane w następujący sposób:

$$\mathit{MaxMin}(\beta, p) = \begin{cases} \max\{\beta(r)\ :\ r \text{ jest następnikiem } p\} & \text{jeśli } p \text{ należy do Ani,} \\ \min\{\beta(r)\ :\ r \text{ jest następnikiem } p\} & \text{jeśli } p \text{ należy do Bolka.} \end{cases}$$

Warto tu zwrócić uwagę na to, że $\mathit{Popraw}(\beta, p) \geq \beta(v)$ oraz, że $\mathit{Popraw}(\beta, p) > \beta(v)$ jeśli etykietowanie β nie jest dobre w polu p.

Przykład 3.4 *Dla skrócenia i uproszczenia ilustracji działania algorytmu PodnośEtykietowanie wprowadzamy następującą notację na oznaczenie ciągu kilku operacji Popraw:*

$$\begin{aligned} \mathit{Popraw}\big(\beta, [p_1, p_2]\big) &= \mathit{Popraw}\big(\mathit{Popraw}(\beta, p_1), p_2\big) \\ \mathit{Popraw}\big(\beta, [p_1, p_2, p_3]\big) &= \mathit{Popraw}\Big(\mathit{Popraw}\big(\mathit{Popraw}(\beta, p_1), p_2\big), p_3\Big) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Rozważmy następujące wykonanie procedury PodnośEtykietowanie:

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta_0(p)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\beta_1(p) = \mathit{Popraw}\big(\beta_0, [4,5,6]\big)(p)$	0	0	0	1	1	1	0	0
$\beta_2(p) = \mathit{Popraw}\big(\beta_1, [1,2]\big)(p)$	1	1	0	1	1	1	0	0
$\beta_3(p) = \mathit{Popraw}(\beta_2, 7)(p)$	1	1	0	1	1	1	1	0
$\beta_4(p) = \mathit{Popraw}\big(\beta_3, [4,6,1,2,7]\big)(p)$	2	2	0	2	1	2	2	0
$\beta_5(p) = \mathit{Popraw}\big(\beta_4, [4,6,1,2,7]\big)(p)$	3	3	0	3	1	3	3	0
$\beta_6(p) = \mathit{Popraw}\big(\beta_5, [4,6,1,2,7]\big)(p)$	∞	∞	0	∞	1	∞	∞	0

Etykietowanie β_6 jest dobre dla Bolka. Zauważ, że etykietowanie β_6 jest "mniejsze" niż etykietowanie β z Przykładu 3.2, w tym sensie, że dla każdego pola $p \in P$, mamy $\beta_6(p) \leq \beta(p)$.

Można myśleć o procedurze *PodnośEtykietowanie* jako o metodzie przybliżania etykietowania β do „najmniejszego" dobrego etykietowania „z dołu". Istotnie, początkowe etykietowanie $\beta = \beta_0$, gdzie $\beta_0(p) = 0$, dla każdego pola p, jest „mniejsze" niż jakiekolwiek inne etykietowanie. (Dla ścisłości, mówimy, że etykietowanie β jest „mniejsze" lub równe niż etykietowanie β' jeśli $\beta(p) \leq \beta'(p)$, dla każdego pola p.) Kolejne „poprawki" polegające na podnoszeniu wartości etykietowania β w pewnym polu w którym β nie jest dobre dla Bolka, zachowują własność, że etykietowanie β jest mniejsze lub równe niż każde dobre etykietowanie. Jest tak dlatego, że w procedurze *PodnośEtykietowanie* wartość etykiety w pewnym polu jest zawsze podnoszona tylko o tyle o ile to jest konieczne aby etykietowanie stało się dobre dla Bolka w tym polu.

Przykład 3.5 *Etykietowanie $\beta_6 : P \to \{1, 2, 3, \infty\}$:*

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta_6(p)$	∞	∞	0	∞	1	∞	∞	0

z Przykładu 3.4 jest najmniejszym *dobrym etykietowaniem dla Bolka w grze z treści zadania. Inaczej mówiąc, etykietowanie β_6 jest mniejsze nie tylko niż dobre etykietowanie dla Bolka β z Przykładu 3.2, ale jest mniejsze lub równe niż* każde *dobre etykietowanie dla Bolka w tej grze.*

Zauważ, że każde pole może być poprawione przez procedurę *PodnośEtykietowanie* co najwyżej $k+1$ razy, zatem liczba powtórzeń pętli 4:–8: jest $O(k \cdot n)$.

Co więcej, etykietowanie β po zakończeniu procedury *PodnośEtykietowanie* jest dobrym etykietowaniem dla Bolka; w „najgorszym" przypadku mamy $\beta(p) = \infty$, dla każdego pola p: „największe" dobre etykietowanie. Z Faktu 3.3 wynika, że Bolek ma strategię wygrywającą z każdego pola p takiego, że $\beta(p) \neq \infty$. *Najmniejsze* dobre etykietowanie dla Bolka, tj. etykietowanie β obliczane przez procedurę *PodnośEtykietowanie*, jest szczególnie interesujące ponieważ można z niego łatwo odczytać rozwiązanie gry w zielone, tj. zbiór pól z których istnieje strategia wygrywająca dla Ani.

Twierdzenie 3.6 (Strategia wygrywająca dla Ani)
Etykietowanie $\beta : P \to \{0, 1, 2, \ldots, k, \infty\}$ obliczone przez procedurę PodnośEtykietowanie ma własność, że Ania ma strategię wygrywającą z każdego pola p, dla którego $\beta(p) = \infty$.

Dowód tego twierdzenia nie jest natychmiastowy i wymaga dośc subtelnej argumentacji. Poniżej szkicujemy przydatne w tym celu pojęcia oraz ogólny tok rozumowania. Wypełnienie szczegółów dowodu pozostawiamy jako ćwiczenie dla dociekliwego czytelnika.

Definicja 3.7 (Dobre etykietowanie dla Ani) *Rozważmy etykietowanie $\alpha : P \to \{0, 1, 2, \ldots, n-k, \infty\}$. Powiemy, że etykietowanie α jest* dobre dla Ani w polu *p jeśli $\alpha(p) = \infty$ lub spełnione są następujące warunki:*

- *jeśli pole p należy do Ani to* istnieje *następnik r pola p taki, że zachodzi warunek PostępAni$(\alpha; p, r)$,*

- *jeśli pole p należy do Bolka to dla* każdego *następnika r pola p, zachodzi warunek PostępAni($\alpha; p, r$);*

gdzie warunek PostępAni($\alpha; p, r$) oznacza, że $\alpha(p) > \alpha(r)$ jeśli pole p jest białe. Mówimy, że etykietowanie α jest dobre *dla Ani jeśli α jest dobre dla Ani we wszystkich polach planszy.*

Przykład 3.8 *Etykietowanie $\alpha : P \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \infty\}$ zdefiniowane przez następującą tabelę jest dobre dla Ani.*

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha(p)$	1	1	∞	0	∞	0	2	∞

Podobnie jak w przypadku dobrych etykietowań dla Bolka, można skonstruować strategię wygrywającą dla Ani jeśli dane jest dobre etykietowanie dla Ani. Dowód następującego łatwego faktu pozostawiamy czytelnikowi.

Ćwiczenie 3.9 (Strategia wygrywająca dla Ani) *Wykaż, że jeśli etykietowanie $\alpha : P \to \{0, 1, 2, \ldots, n-k, \infty\}$ jest dobre dla Ani to Ania ma strategię wygrywającą z każdego pola p takiego, że $\alpha(p) \neq \infty$.*

W celu wykazania Twierdzenia 3.6 do procedury *PodnośEtykietowanie* dodamy instrukcje obliczające etykietowanie $\alpha : P \to \{0, 1, 2, \ldots, n-k, \infty\}$. Zauważ, że te dodatkowe instrukcje nie mają wpływu na obliczenie etykietowania β i służa nam tylko jako pomoc w dowodzie Twierdzenia 3.6. Rozważmy następującą modyfikację procedury *PodnośEtykietowanie*:

```
procedure PodnośEtykietowanie'
begin
    dla każdego pola p do begin β(p) := 0; α(p) := ∞ end
    while β nie jest dobre dla Bolka do
    begin
        wybierz pole p w którym β nie jest dobre dla Bolka
        β(p) := Popraw(β, p)
        if β(p) = ∞ then α(p) := Ustal(α, p)
    end
end
```

gdzie

$$\mathit{Ustal}(\beta, p) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli pole } p \text{ jest zielone,} \\ 1 + \mathit{MinMax}(\beta, p) & \text{jeśli pole } p \text{ jest białe;} \end{cases}$$

oraz

$$\mathit{MinMax}(\alpha, p) = \begin{cases} \min\{\alpha(r) \;:\; r \text{ jest następnikiem } p\} & \text{jeśli } p \text{ należy do Ani,} \\ \max\{\alpha(r) \;:\; r \text{ jest następnikiem } p\} & \text{jeśli } p \text{ należy do Bolka.} \end{cases}$$

Przykład 3.10 *Przekonaj się, że etykietowanie α obliczane przez procedurę PodnośEtykietowanie' jest równe etykietowaniu α z Przykładu 3.8.*

Ćwiczenie 3.11 (Dobre etykietowanie dla Ani) *Wykaż, że etykietowanie* $\alpha : P \to \{0, 1, 2, \ldots, n-k, \infty\}$ *obliczane przez procedurę PodnośEtykietowanie' jest dobre dla Ani.*

Wskazówka. *Wykaż, że gdyby istniało pole p takie, że* $\alpha(p) \neq \infty$, *ale* α *nie jest dobrym etykietowaniem dla Ani w polu p to* $\beta(p) \neq \infty$, *gdzie* β *jest* najmniejszym *dobrym etykietowaniem dla Bolka.*

Powyższą analizę dobrych etykietowań dla Ani i Bolka można podsumować w następujący sposób.

Twierdzenie 3.12 (Poprawność algorytmu *PodnośEtykietowanie*) *Niech* β *będzie etykietowaniem obliczonym przez procedurę PodnośEtykietowanie. Wtedy Ania ma strategię wygrywającą z każdego pola p, dla którego zachodzi* $\beta(p) = \infty$, *a Bolek ma strategię wygrywającą ze wszystkich pozostałych pól.*

Ćwiczenie 3.13 (Wydajna implementacja algorytmu) *Zaimplementuj algorytm PodnośEtykietowanie w taki sposób aby czas działania twojego programu był* $O(k \cdot m)$.

Wskazówka. *Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą ustalanie w czasie* $O(1)$ *czy istnieje pole p w którym aktualne etykietowanie nie jest dobre dla Bolka, oraz poprawianie wartości etykietowania w polu p i aktualizację struktury danych w czasie* $O(d)$, *gdzie d jest sumą liczb następników pola p oraz jego „poprzedników“, tj. pól dla których p jest następnikiem.*

Ciekawy problem 3.14 *Przyjmijmy, że k—liczba zielonych wierzchołków—jest* $\Omega(n)$. *Czy istnieje algorytm rozwiązujący gry w zielone działający w czasie* $o(n \cdot m)$? *W szczególności: czy istnieje algorytm rozwiązujący gry w zielone działający w czasie* $O(m)$?

4 Testy

Ocena rozwiązań zadania „Gra w zielone“ przedstawionych przez uczestników olimpiady została oparta na zachowaniu sie programów na kolekcji jedenastu testów, tj. jedenastu plików wejściowych zawierających opisy plansz różnych gier w zielone:

- `gra0.in`: Plik wejściowy `GRA.IN` z treści zadania.
- `gra1.in`, `gra2.in`: Niewielkie plansze, zaprojektowane głównie z myślą o sprawdzaniu czy program poprawnie rozwiązuje zadanie, nie wymagające—ze względu na mały rozmiar—aby algorytm był bardzo wydajny.
- `gra3.in`: Niewielka plansza o kilkudziesięciu polach z losowo dobranymi następnikami.
- `gra4.in`*: Plansza o umiarkowanej wielkości z losowo dobranymi następnikami; mała średnia liczba następników.
- `gra5.in`*: Plansza o umiarkowanej wielkości z losowo dobranymi następnikami; duża średnia liczba następników.
- `gra6.in`*: Plansza o dużej wielkości z losowo dobranymi następnikami.

- `gra7.in`*: Plansza o umiarkowanej wielkości w której wszystkie pola przeciwnika o większych numerach niż numer danego pola są następnikami tego pola.
- `gra8.in`*: Plansza o bardzo dużej wielkości z losowo dobranymi następnikami; mała średnia liczba następników.
- `gra9.in`*: Plansza o bardzo dużej wielkości z losowo dobranymi następnikami; duża średnia liczba następników.
- `gra10.in`*: Plansza o umiarkowanej wielkości na której rozwiązania przedstawione w podrozdziałach 2 oraz 3 działają w czasie równym pesymistycznemu oszacowaniu, tj. $\Omega(k \cdot m)$.

Testy oznaczone gwiazdką zawierają dodatkowe małe fragmenty planszy zaprojektowane z myślą o weryfikacji poprawności rozwiązania.